DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Auteur : Alain Ladureau

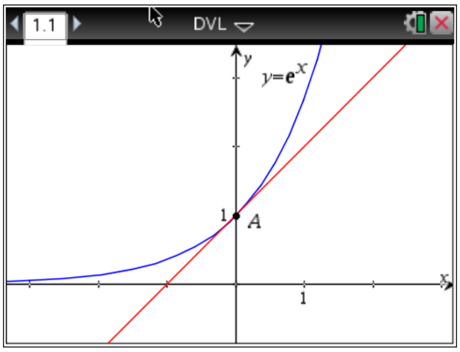
TI-Nspire™ CAS

1. Objectifs

- Découvrir la notion de développement limité.
- Utiliser des développements limités dans l'étude locale des fonctions.
- Les appliquer à l'obtention de l'équation de la tangente et à l'étude de la position relative de la courbe et de sa tangente.

2. Étude d'un exemple : la fonction exponentielle

Développement limité à l'ordre 1



Exercice

a. Déterminer sous la forme $y = b + a.x$ une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) d'équation $y = e^x$ au point A d'abscisse 0.

b. On note g la fonction polynôme de degré 1 définie par $g(x) = b + a.x$.
Vérifier que l'on a $f(0) = g(0)$ et $f'(0) = g'(0)$.

c. On pose $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - g(x)}{x}$.
En utilisant le tableur de la calculatrice, conjecturer la limite en 0 de $\varepsilon(x)$.

Réponses

a. On trouve $y = 1 + x$

b. $f(0) = g(0) = 1$ et $f'(0) = g'(0) = 1$

c.

$e^x \to f(x)$ *Terminé*

$1+x \to g(x)$ *Terminé*

$\dfrac{f(x)-g(x)}{x} \to \varepsilon(x)$ *Terminé*

On saisit les fonctions dans une page de calcul.

	A x	B	C	D
◆		=ε(a[])		
1	0.5	0.297443		
2	0.2	0.107014		
3	0.1	0.051709		
4	0.05	0.025422		
5	0.001	0.0005		
6				

B1 =0.2974425414002

On ouvre une page *Tableur* et on remplit les colonnes.

$\lim_{x \to 0} (\varepsilon(x))$ 0

On peut aussi utiliser l'outil *Limite* du menu *Analyse*.

Bilan : l'écriture $f(x) = g(x) + x.\ \varepsilon(x)$ est appelée **le développement limité de f en zéro à l'ordre 1**.

Développement limité à l’ordre 2

On souhaite poursuivre l’étude précédente en cherchant cette fois le développement à l’ordre 2 de f en 0.
On pose $h(x) = c + b.x + a.x^2$.
En s’inspirant de l’exercice précédent et afin que les courbes représentatives de f et de h « se ressemblent » au voisinage du point A on impose les conditions suivantes : $f(0) = h(0)$, $f'(0) = h'(0)$ et $f''(0) = h''(0)$.

a. Écrire le système d’équations à trois inconnues a, b et c que permettent d’écrire les conditions imposées ci-dessus et résoudre ce système.

b. On pose $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - h(x)}{x^2}$.
En utilisant le tableur de la calculatrice, conjecturer la limite en 0 de $\varepsilon(x)$.

c. Afficher à l’écran de la calculatrice, dans un même repère, les représentations graphiques des fonctions f et h.

Bilan : l’écriture $f(x) = h(x) + x^2.\varepsilon(x)$ est appelée le **développement limité de *f* en zéro à l’ordre 2**.

Réponses

a. $h(0) = f(0) = 1$ conduit à $c = 1$, $h'(0) = f'(0) = 1$ conduit à $b = 1$.

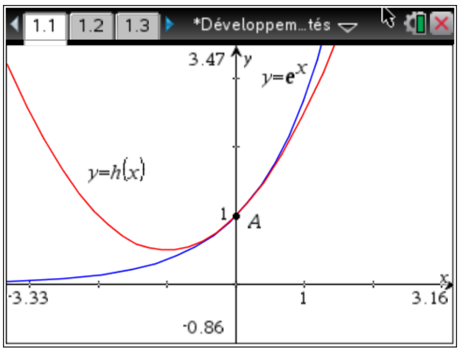
$h''(0) = f''(0) = 1$ conduit à $a = \dfrac{1}{2}$.

On a donc $h(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$.

b.

$1+x+\frac{1}{2}\cdot x^2 \rightarrow h(x)$ *Terminé* $e^x \rightarrow f(x)$ *Terminé* $\frac{f(x)-h(x)}{x^2} \rightarrow \varepsilon(x)$ *Terminé*	A x / B =ε(a[]) 1: 0.5 / 0.094885 2: 0.2 / 0.035069 3: 0.1 / 0.017092 4: 0.05 / 0.008439 5: 0.001 / 0.000167 B1 =0.0948850828004	$\lim_{x \to 0} (\varepsilon(x))$ 0
On saisit les fonctions dans une page de calcul.	On ouvre une page *Tableur* et on remplit les colonnes.	On peut aussi utiliser l’outil *Limite* du menu *Analyse*.

c. Représentation graphique



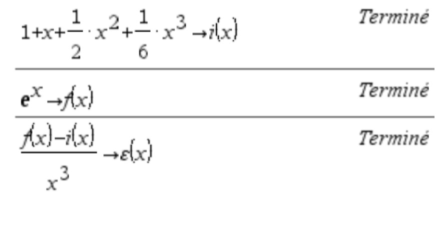
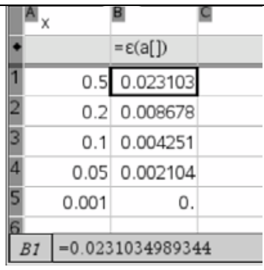
Développement limité à l’ordre 3

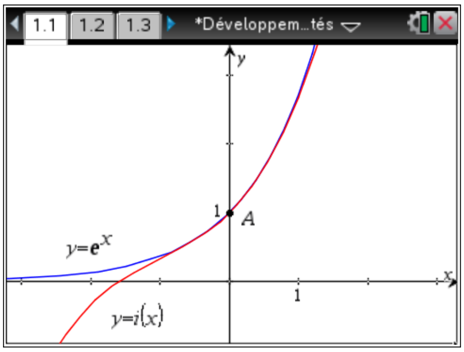
En vous inspirant de la méthode mise en place ci-dessus, reprendre les questions a), b) et c) de l’étude précédente en les adaptant à un polynôme de degré 3.

Réponses

a. On pose $i(x) = d + cx + bx^2 + ax^3$. On trouve $d = 1$, $c = 1$, $b = ½$ et $c = 1/6$

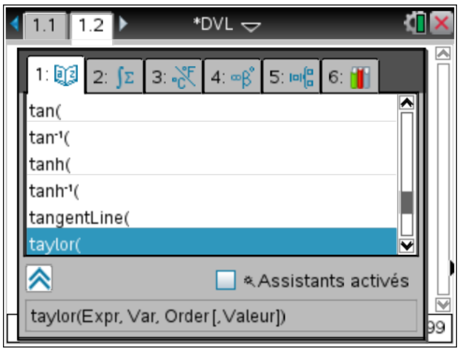
b.

		
On saisit les fonctions dans une page de calcul.	On ouvre une page *Tableur* et on remplit les colonnes.	On peut aussi utiliser l’outil *Limite* du menu *Analyse*.



Vérification à l’aide la calculatrice

Ouvrir une page de calcul, appuyer sur la touche (catalogue) et sélectionner la fonction *taylor.*
Observer en bas de l’écran la syntaxe :
Expr est l’expression de $f(x)$,
Var est la variable utilisée,
Order est l’ordre du développement limité,
Valeur est la valeur de x en laquelle on cherche le développement limité de f.



La syntaxe est donc la suivante pour la question posée ici :

$$\text{taylor}\left(e^x,x,3,0\right)$$

3. Développements limités, cas général

Définition

On appelle développement limité en zéro à l'ordre n d'une fonction f, l'écriture :

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x) + x^n.\ \varepsilon(x)$$

où $\mathrm{P}_n(x)$ désigne un polynôme de degré n et ε une fonction de x telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Propriétés

1. La fonction polynôme $x \mapsto \mathrm{P}_n(x)$ est une approximation de $f(x)$ valable si x est voisin de 0.

2. Plus l'ordre du développement limité est élevé, meilleure est l'approximation.

3. *Équation de la tangente à C_f, courbe représentative de f*

Si $f(x) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1 x} + a_2x^2 + a_3\, x^3 + \ldots + a^n x^n + x^n.\ \varepsilon(x)$,

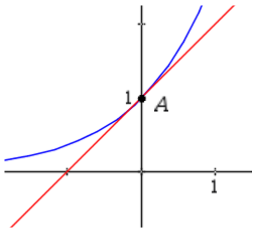
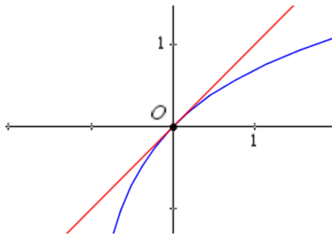
$\boldsymbol{y = a_0 + a_1 x}$ est l'équation cartésienne de la tangente à C_f au point de C_f d'abscisse 0.

4. *Position relative courbe et tangente au voisinage du point d'abscisse* 0

Afin de connaître la position de la courbe par rapport à sa tangente pour x voisin de 0, on étudie le signe de la différence $f(x) - (a_0 + a_1x) = a_2x^2 + a_3\, x^3 + \ldots + a_nx^n + x^n.\ \varepsilon(x)$.

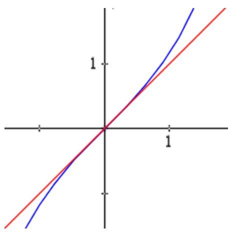
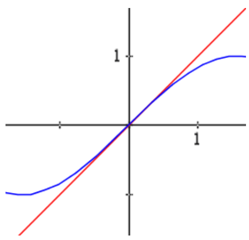
Le signe de cette différence est le signe de son premier terme non nul.

Cas n° 1 : $\boldsymbol{a_2 \neq 0}$

 $\boldsymbol{a_2 > 0}$: la courbe est située au dessus de sa tangente au voisinage de $x = 0$.	 $\boldsymbol{a_2 < 0}$: la courbe est située en dessous de sa tangente au voisinage de $x = 0$.

Cas n° 2 : $\boldsymbol{a_2 = 0}$

La suite dépend du terme non nul qui suit. On ne traitera ici que le cas où $a_3 \neq 0$.

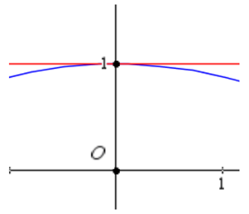
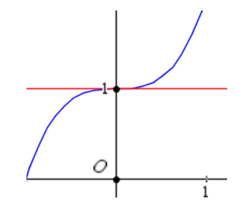
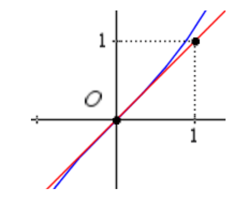
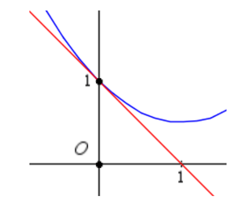
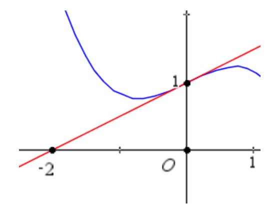
 $\boldsymbol{a_3 > 0}$ lorsque $x > 0$, la courbe est située au dessus de sa tangente, lorsque $x < 0$, la courbe est située en dessous de sa tangente.	 $\boldsymbol{a_3 < 0}$ lorsque $x > 0$, la courbe est située en dessous de sa tangente, lorsque $x < 0$, la courbe est située au dessus de sa tangente.

3. Exercices

Exercice 1

Dans cet exercice, on suppose que le développement limité de f est connu et que le coefficient a_3 est non nul.

En observant les graphiques ci-dessous où l'on a tracé la représentation graphique de f et sa tangente au point d'abscisse 0, quels renseignements peut-on tirer sur les coefficients a_0, a_1, a_2 et a_3 dans chacun des cas ?

				
1	2	3	4	5
$a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $a_2 < 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = 0$ $a_2 = 0$ $a_3 > 0$	$a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_2 = 0$ $a_3 > 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = -1$ $a_2 > 0$	$a_0 = 1$ $a_1 = \frac{1}{2}$ $a_2 = 0$ $a_3 < 0$

Exercice 2

On considère la fonction numérique f définie pour tout x réel par : $f(x) = e^{2x}(-x+1)+1$.

On désigne par C sa courbe représentative tracée dans un repère orthonormal.

1. Calculer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

2. En déduire une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 et la position de C par rapport à la tangente.

Réponses

1. On trouve $f(x) = 2 + x - \frac{2}{3}x^3 + x^3.\,\varepsilon(x)$.

2. La tangente a pour équation $y = 2 + x$.

L'étude du signe de l'expression $-\frac{2}{3}x^3$ permet d'affirmer que C est au dessus de sa tangente lorsque x est négatif et voisin de 0 et qu'elle est située sous sa tangente pour x positif voisin de 0.
Une vérification peut être effectuée en affichant construisant C et sa tangente à l'écran de la calculatrice.